

**Adaptation des modèles de Cz optimal  
de finesse max et d'endurance max (Vz min)  
au cas petit Reynolds, grand allongement  
(octobre 2004)**

[matthieu.scherrer.04@supaero.org](mailto:matthieu.scherrer.04@supaero.org)

## 1. Formule classique

Dans la littérature on trouve classiquement les formules suivantes pour la valeur de Cz maximisant la finesse et l'endurance max (Vz min) pour un planeur donné :

$$Cz_{opt, finesse\_max} = \sqrt{\pi\lambda Cx_0}$$

$$Cz_{opt, Vz\_min} = \sqrt{3\pi\lambda Cx_0}$$

Où  $\lambda$  est l'allongement de l'aile,  $Cx_0$  la traînée à coefficient de portance Cz nul.

## 2. Mise en défaut

Ces critères sont valables quand les *variations* de la traînée de profil en fonction de Cz sont négligeables devant les *variations* de la traînée induite en fonction de Cz.

Ces critères donnent des résultats erronés quand cette condition n'est pas respectée, et en particulier dans les conditions suivantes :

- Grand allongement : le niveau et les variations de traînée induite deviennent faibles.
- Faible Reynolds : le niveau de traînée de profil est plus important, et la proportion de traînée de pression dans la traînée de profil est grande (de l'ordre de 50%) entraînant des variations importantes de Cxprofil en fonction du Cz.

Pour les planeurs modèles réduits notamment, où les deux aspects se conjuguent, les formules classiques ne prennent donc pas en compte bon nombre d'effets physiques pourtant macroscopiques. On peut difficilement appliquer ces formules « classiques » avec des résultats quantitatifs probants.

### 3. Correction du critère

On choisit de rendre l'effet du profil homogène à un effet d'allongement.

Notons que ce choix ne repose sur **aucun argument physique**, et reste **purement arbitraire**. Il permet néanmoins de comparer les ordres de grandeur de l'effet du profil relativement à l'effet de traînée induite pour l'aile considérée.

On définit alors un « allongement total équivalent », prenant en compte l'effet du profil sur la polaire.

$$\frac{1}{\lambda_{tot}} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_{eq}}$$

On distinguera le cas finesse max du cas endurance max.

$$Cz_{opt, finesse\_max} = \sqrt{\pi \lambda_{tot, finesse\_max} Cx_0}$$

$$Cz_{opt, Vz\_min} = \sqrt{3\pi \lambda_{tot, Vz\_min} Cx_0}$$

En ayant défini  $\lambda_{eq, finesse\_max}$  et  $\lambda_{eq, Vz\_min}$ , deux effets de profil différents selon le critère considéré.

### 4. Données quantitatives sur l'effet équivalent de profil en finesse max et en endurance max (Vzmin) pour les modèles réduits de planeur

Les valeurs de  $\lambda_{eq, finesse\_max}$  et  $\lambda_{eq, Vz\_min}$  ont été identifiées dans les conditions suivantes :

- Polaire de profil Xfoil Reynolds variable, avec  $Re\sqrt{Cz} = 190000$
- Des profils conduisant à des  $Cz_{max}$  de l'aile variant de 0.7 à 1.5
- Allongement  $\lambda$  variant de 5 à 50

Quantitativement, on peut utiliser les valeurs suivantes :

$$\lambda_{eq, finesse\_max} = 37(Cz_{max} - 0.5)$$

$$\lambda_{eq, Vz\_min} = 16(Cz_{max} - 0.5)$$

Ces valeurs dépendent en particulier du domaine de Reynolds considéré, mais on observe une assez bonne robustesse dans tout le domaine des planeurs modèles réduit.

La formulation en terme d'allongement équivalent, si elle n'a aucun fondement physique, permet de comparer les ordres de grandeur :

Equipons une aile d'un profil doté d'un  $Cz_{max}$  de 1.2. L'effet sur la performance sera comparable à l'effet d'une aile d'allongement 26 du point de vue de la finesse max, et comparable à l'effet d'une aile d'allongement 11 du point de vue de l'endurance max (Vzmin).

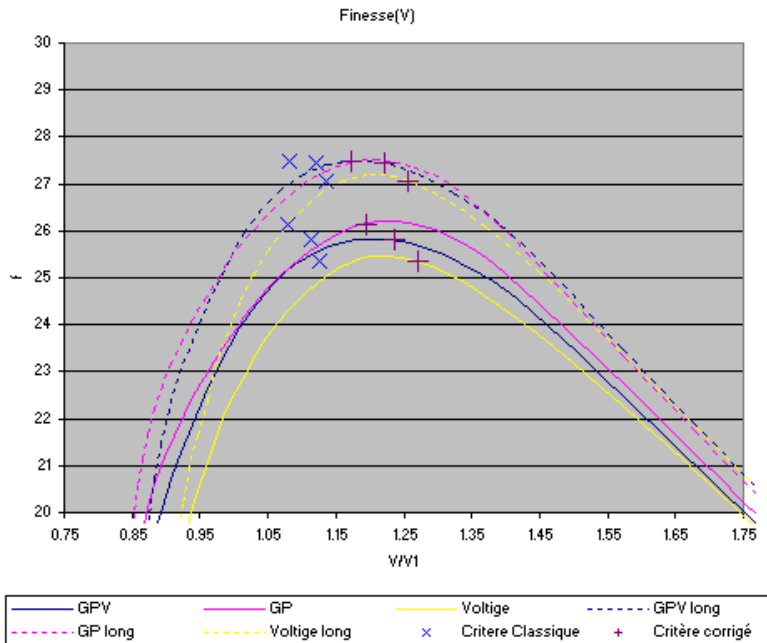
Sur une aile d'allongement géométrique 7, les allongements totaux à considérer localement en prenant en compte l'effet de ce profil seront plutôt de l'ordre de 5.5 et 4.3 pour respectivement le  $Cz$  de finesse max et d'endurance max (Vzmin), la correction ainsi effectuée correspond à des écarts de 10% et 19% sur la valeur du  $Cz$ .

Sur une autre aile, d'allongement géométrique 20, on doit considérer localement des allongements totaux respectivement de 11.2 et 7.2, les écarts passant respectivement à 21% et 32% sur les valeurs de  $Cz$  !

## 5. Visualisation de résultats

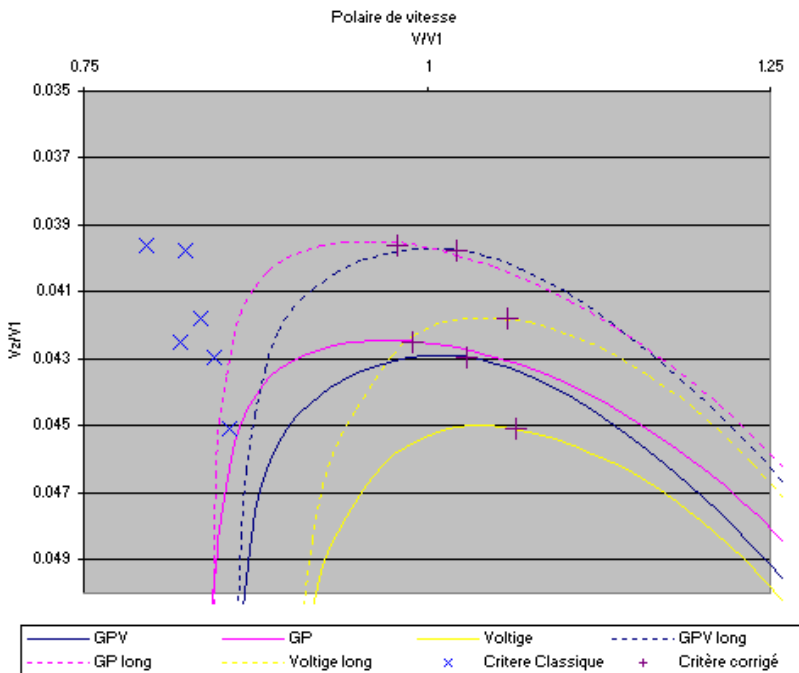
On trace l'évolution de la finesse  $f$  et du rapport  $V_z/V_1=C_x/C_z^{1.5}$ , correspondant à la vitesse de chute adimensionnée d'un planeur ( $V_z/V_1$ ,  $V_1$  étant la vitesse à  $C_z=1$ ), en fonction de la quantité  $1/\sqrt{C_z}$ , correspondant à la vitesse d'équilibre adimensionnée  $V/V_1$ .

Ces polaires sont le résultat d'une intégration de la contribution de plusieurs profils en envergure sur une aile d'allongement 20, et prennent en compte l'équilibrage longitudinal du planeur.



On observe une bonne corrélation entre la valeur prédite par le critère de  $C_z$  de finesse max corrigé et la valeur théorique, sur un exemple pourtant très général.

Egalement on visualise le progrès réalisé par rapport aux formules classiques.



La correction est encore plus utile sur le  $C_z$  d'endurance max (chute mini) : en effet, les  $C_z$  considérés sont d'autant plus proches du  $C_{zmax}$ .

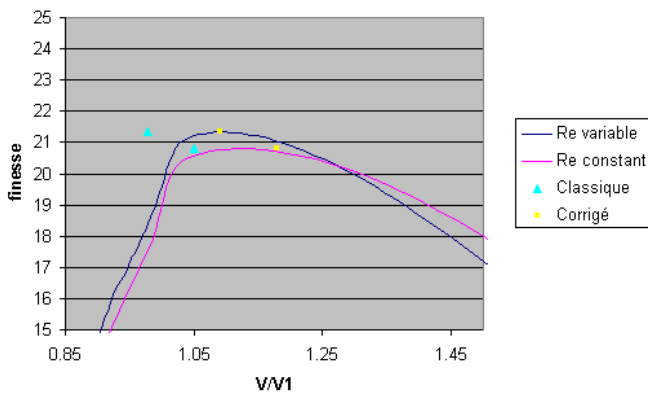
## 6. Limitations

Cette correction n'est qu'une recette de cuisine et non un miracle, il existe un certain nombre de cas où la valeur du  $C_z$  de  $V_z$  min prédite par le critère simple ne correspond pas à la valeur réelle. En effet, une fois de plus, la correction apportée ne prend pas en compte tous les phénomènes physiques, et en particulier aux environs du  $C_z$  max. Elle permet néanmoins un progrès appréciable.

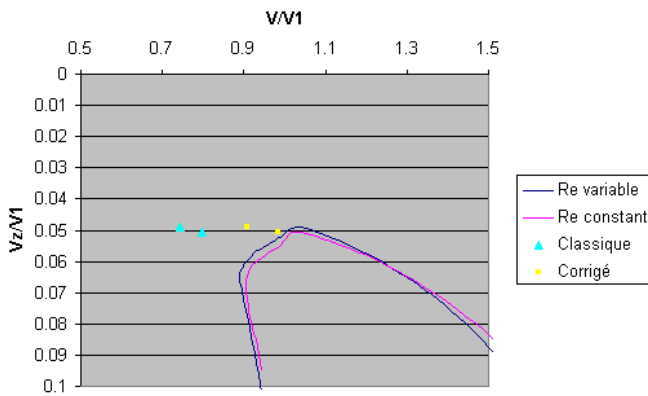
On peut de façon générale adopter le point de vue pragmatique suivant : sur une aile à fort allongement, la limitation en  $C_{zmax}$  prend le dessus sur le critère d'endurance max. La valeur du  $C_{zmax}$  étant inférieure à la valeur théorique du  $C_z$  prédit par le critère simplifié, voler au  $C_z$  max revient à maximiser effectivement la performance considérée (finesse ou endurance).

D'où le « filtre » à utiliser pour corriger cet effet :

$$\text{si } C_{z\_crit\grave{e}re} > C_{zmax} \text{ alors } C_{z\_crit\grave{e}re} = C_{zmax}$$



Dans les cas présentés ici, c'est le caractère particulier de la polaire au voisinage du  $C_{zmax}$  des polaires considérées (caractère « anguleux » de la polaire) qui conduit à une mauvaise évaluation des  $C_z$  de finesse max et d'endurance max par les formules approchées.



La correction proposée, si elle ne donne pas un résultat « exact », permet néanmoins de diminuer l'erreur par rapport au critère classique

## 7. Intérêt

Cette correction de la formule classique de  $C_z$  de finesse max semble assez robuste dans le domaine de validité défini plus haut.

Elle apporte une valeur raisonnable du  $C_z$  de finesse max dans la gamme de Reynolds considérée.

Dans le cas de l'endurance max ( $V_z$  min), cette correction n'est pas tout à fait représentative de tous les aspects en jeu, mais apporte néanmoins un progrès appréciable par rapport à la formule classique.

Ces deux formules permettront, dans le cas des modèles réduit de planeur, d'avoir en première approximation des valeurs de performance dépendant du profil au travers du  $C_{zmax}$  de l'aile.